❑**مثال** : طول AB در دفعات زیر اندازه‌گیری شده است، مطلوب است

الف) تعیین خطای متوسط هندسی

ب) تعیین خطای ماکزیمم

ج) تعیین اندازه‌گیری اشتباه

۱۳۴۷/۴۷ , ۱۳۴۷/۵۲ , ۱۳۴۷/۴۸ , ۱۳۴۷/۴۹ , ۱۳۴۷/۵۳

۱۳۴۷/۹۸ , ۱۳۴۷/۴۹ , ۱۳۴۷/۵۲

حل : به‌دلیل اختلاف زیاد اندازه ۱۳۴۷.۴۸ با بقیه احتمال اشتباه در این اندازه‌گیری داده می‌شود و فعلاً از اندازه‌ها خارج می‌شود، در پایان اگر بررسی‌ها حاکی از مجاز بودن اندازهٔ فوق بود مجدداً عملیات با اندازهٔ فوق تکرار می‌شود و در غیر این‌صورت عملیات صحیح می‌باشد.

x′ (اندازه مشکوک)   ۱۳۴۷.۹۸ m

$$x = \frac{x_۱ + x_۲ + x_۳ + \cdots + x_n}{n}$$

$$= \frac{۱۳۴۷/۴۷ + ۱۳۴۷/۵۲ + ۱۳۴۷/۴۸ + ۱۳۴۷/۴۹ + ۱۳۴۷/۵۳ + ۱۳۴۷/۴۹ + ۱۳۴۷/۵۲}{۷}$$

x   ۱۳۴۷/۵۰

جدول ۱ــ۷ــ مختصات نقاط

شماره	اندازه برحسب متر	$e_i=x_i-x$	$e_i^۲$
$x_۱$	۱۳۴۷/۴۷	−۳	۹
$x_۲$	۱۳۴۷/۵۲	+۲	۴
$x_۳$	۱۳۴۷/۴۸	−۲	۴
$x_۴$	۱۳۴۷/۴۹	−۱	۱
$x_۵$	۱۳۴۷/۵۳	+۳	۹
$x_۶$	۱۳۴۷/۴۹	−۱	۱
$x_۷$	۱۳۴۷/۵۲	+۲	۴
			$\sum e_i^۲ = ۳۲$

الف)

$$e_q=\pm\sqrt{\frac{\sum e_i^{۲}}{n-۱}}=\pm\sqrt{\frac{۳۲}{۷-۱}}=\pm ۲/۳\ \text{cm}$$ خطای متوسط هندسی

ب)

e_M ۲/۵ e_q ۲/۵ × ۲/۳ ۵/۸ cm خطای ماکزیمم

ج) برای تعیین اندازه اشتباه، تفاوت اندازه مشکوک با مقدارمیانگین را تعیین و با خطای ماکزیمم مقایسه می‌کنیم این اندازه‌گیری اشتباه است.

(اندازه مشکوک) x' x ۱۳۴۷/۹۸ ۱۳۴۷/۵ ۰/۴۸ m ۴۸ cm > ۵/۸

۱ـ۱۵ـ روش‌های مجهول‌یابی

در صفحه ۶ کتاب به روش‌های مختلفی اقدام به محاسبه طول بین دو نقطه مشخص شده است که عبارت‌اند از :

الف) قضیه فیثاغورث

ب) تشابه شکل‌های هندسی

ج) نسبت‌های مثلثاتی

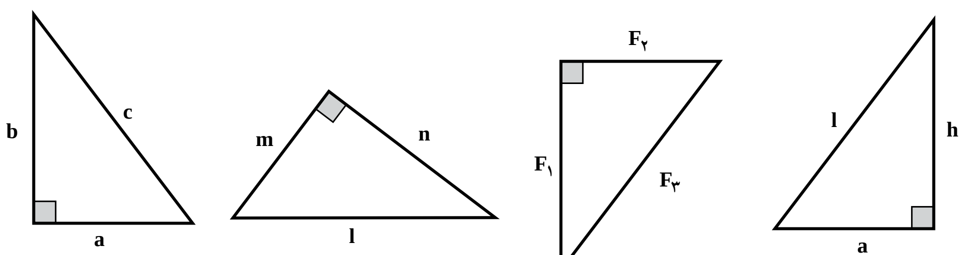
د) قضیه سینوس‌ها

هـ) قضیه کسینوس‌ها (در کتاب استفاده نشده است).

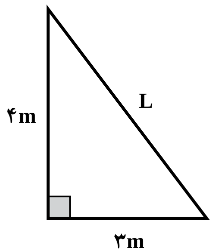
۱ـ۱۵ـ۱ـ محاسبهٔ طول با استفاده از قضیه فیثاغورث :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر

قضیه فیثاغورث فقط در مثلث‌های قائم‌الزاویه (مثلثی که دو ضلع آن بر هم عمود هستند.) برقرار است و وتر به ضلع روبه‌روی زاویه قائمه گویند.



$C^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$ $l^{۲}=m^{۲}+n^{۲}$ $F_۳^{۲}=F_۱^{۲}+F_۲^{۲}$ $l^{۲}=a^{۲}+h^{۲}$

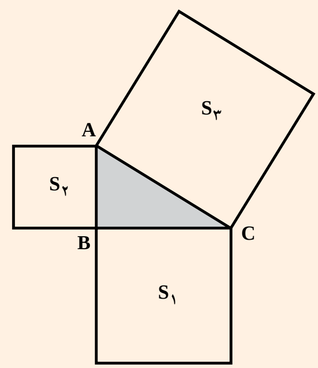


❑مثال ۱ : در مثلث قائم‌الزاویه نشان داده شده اندازه وتر (L) را تعیین کنید.

$L^2 \quad ۹ \quad ۱۶ \quad ۲۵$ $L^2 \quad ۳^2 \quad ۴^2$ از قضیه فیثاغورث

$L = \sqrt{۲۵} = ۵\ m$

رابطه فیثاغورث : فیثاغورث دانشمند و ریاضی‌دان یونان باستان، هنگامی که بر روی مثلث قائم‌الزاویه بررسی می‌نمود، متوجه شد که «مساحت مربع حاصل از وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مساحت دو مربع حاصل از اضلاعی که برهم عمود هستند» این قانون بعدها به عنوان قضیه فیثاغورث شناخته شد که «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع، مجذور دو ضلع زاویه قائمه».



$S_۳ \quad S_۱ \quad S_۲$

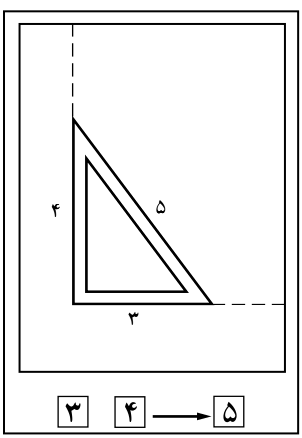
$S_۳ \quad AC \times AC \quad AC^۲$

$S_۱ \quad AB \times AB \quad AB^۲$

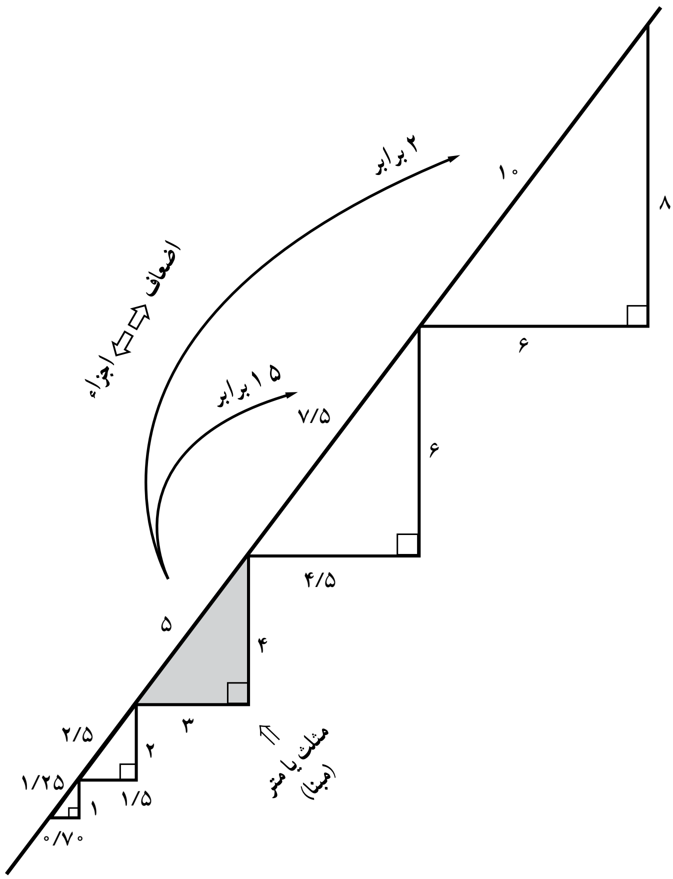
$S_۲ \quad BC \times BC \quad BC^۲$

با جایگزینی داریم.

قضیه فیثاغورث : $\boxed{AC^۲ \quad AB^۲ \quad BC^۲}$

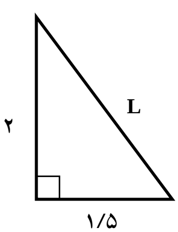


۱ـ۱۵ـ۲ـ ماشین حساب بنایی : بناها برای گونیا کردن گوشه‌ها از نسبت ۳ و ۴ و ۵ استفاده می‌کنند که می‌توان به‌سادگی اجزا و اضعاف آن را مورد استفاده قرار داد.



نتیجه : براساس مثلث مبنا می‌توان آن را به هر نسبتی بزرگ و یا کوچک نمود که هر سه اندازهٔ اضلاع به همان نسبت افزایش یا کاهش می‌یابند. از این خاصیت برای مسائل و نسبت‌ها استفاده می‌شود.

❑مثال ۲ : با توجه به مثلث مبناء (۳ و ۴ و ۵) طول وتر مثلث نشان داده شده را تعیین کنید.



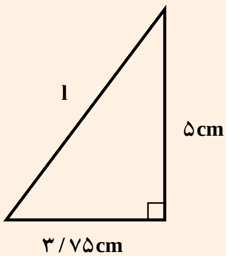
حل : با کمی دقت ملاحظه می‌شود که مثلث قائم‌الزاویه است و دو ضلع آن $\frac{۱}{۲}$ اندازه‌های مثلث مبناء است پس طول وتر نصف مثلث مبناء می‌باشد.

(۲/۵ و ۲ و ۱/۵)   (۵ و ۴ و ۳) $\frac{۱}{۲}$ ⇐ ۲/۵   L

بیشتر بدانید

در مثلث بنایی (۵ و۴ و۳)، نسبت ضلع بلندتر به ضلع کوچک‌تر (اضلاع قائمه) $\frac{۴}{۳}=۱/۳۳$ می‌باشد و نسبت عکس آنها $\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$ است. پس در هر مثلث قائم‌الزاویه که نسبت اضلاع قائمه آن ۱/۳۳ و یا ۰/۷۵ باشند مثلث تابع ماشین‌حساب بنایی است و با پیدا کردن مقیاس تغییر (نسبت به مثلث پایه ۳، ۴، ۵) می‌توان سایر اضلاع موردنظر را تعیین نمود.

❑**مثال :** طول وتر مثلث نشان داده شده چند سانتی‌متر است؟



بررسی اولیه : $\frac{۵}{۳/۷۵}=۱/۳۳$ یا $\frac{۳/۷۵}{۵}=۰/۷۵$

پس مثلث تابع مثلث بنایی است و چون عدد ۴ به ۵ تبدیل شده است پس ضریب بزرگنمایی ۱/۲۵ است.

(۵ و۴ و۳) ۱/۲۵ (l و ۵ و ۳/۷۵)

l ۱/۲۵ × ۵ ۶/۲۵ cm

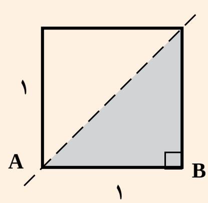
بیشتر بدانید

ماشین‌حساب معماری : مبنای هندسه در معماری براساس تکثیر و توسعه مربع می‌باشد اگر اضلاع مربعی واحد فرض شود آنگاه وتر آن $\sqrt{۲}$ می‌باشد آن را جمع معماری تعریف می‌کنیم.

AB BC ۱

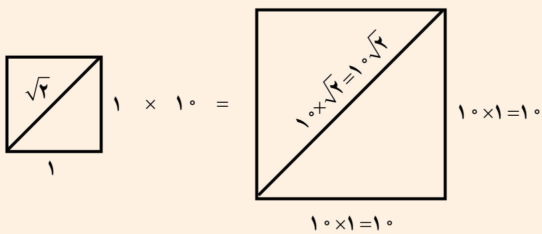
AC[۲] AB[۲] BC[۲] ۱[۲] ۱[۲] ۲

$AC=\sqrt{۲}$

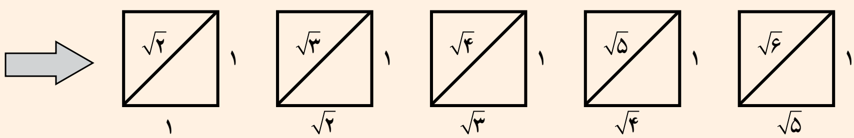


اگر مربع (مثلث حاصل از آن) نشان داده شده را n برابر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر نمود آنگاه اضلاع و وتر آن n برابر می‌شوند.

❑**مثال :** اگر مربع معماری را ۱۰ برابر کنیم وتر آن چند برابر می‌شود.

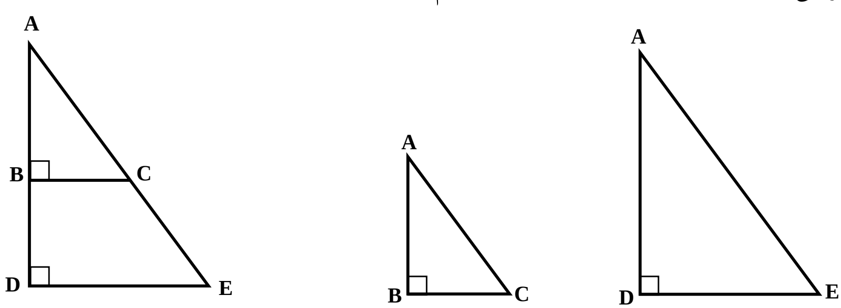


حرکت به سمت مستطیل‌های زیبا : در اشکال نشان داده نشده قاعدهٔ هر مستطیل براساس وتر قبلی شکل گرفته است که رابطه‌ای بین وتر آنها به‌صورت افزایشی وجود دارد.



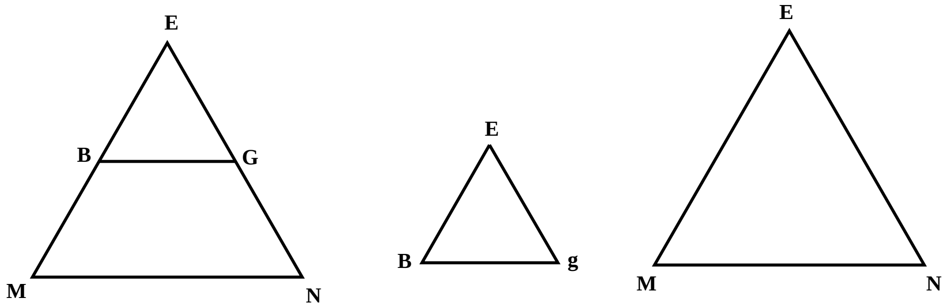
۱ـ۱۶ـ محاسبه طول با استفاده از نسبت تشابه شکل‌های هندسی

تعریف نسبت تشابه : اگر دو مثلث با هم متشابه باشد، نسبت بین اضلاع مثلث‌های متشابه با هم برابر می‌باشد. دو مثلث $A\hat{B}C$ و $A\hat{D}E$ با هم متشابه هستند.

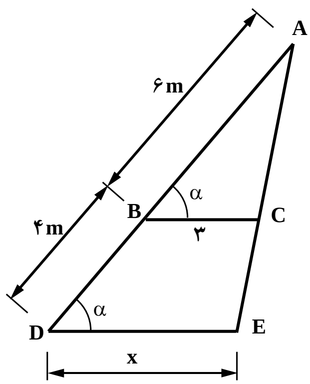


$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}\Rightarrow \Delta_{ABC} \quad \Delta_{ADE}$$

در شکل زیر اگر Bg موازی mn باشد دو مثلث $\overset{\Delta}{BEG}$ و $\overset{\Delta}{EMN}$ با هم متشابه می‌باشند.

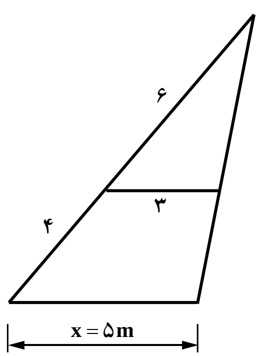


$$\frac{BE}{ME}=\frac{EG}{EN}=\frac{BG}{MN}\Rightarrow \Delta_{EBg}\sim\Delta_{EMN}$$



❑**مثال ۱ :** در مثلث نشان داده شده اگر اضلاع BC و DE موازی باشند از طریق ترسیمی اندازهٔ ضلع مجهول (X) را تعیین و سپس نتیجه را با نسبت تشابه شکل‌های هندسی کنترل نمایند.

روش ترسیمی



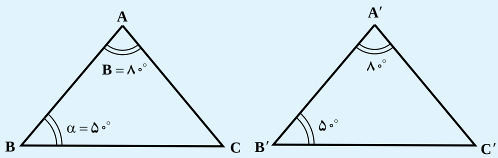
روش تشابه هندسی

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$$

$$\frac{۶}{۶+۴}=\frac{۳}{X}\Rightarrow\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{X}\Rightarrow X=\frac{۳\times۱۰}{۶}=۵\,m$$

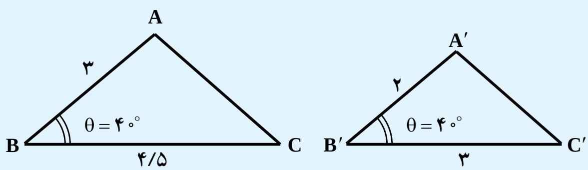
یادآوری از حالات تشابه دو مثلث:

۱ــ هرگاه در دو مثلث، دو زاویه از یکی با دو زاویه از دیگری برابر باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند و تشابه به حالت تساوی دو زاویه گویند.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'=۸۰^\circ\\ \hat{B}=\hat{B}'=۵۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta_{ABC}\sim\Delta_{A'B'C'}$$

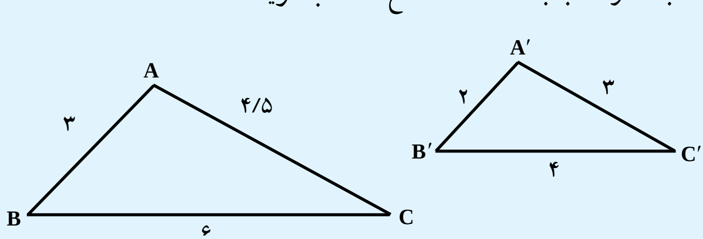
۲ــ هرگاه در دو مثلث، دو ضلع از یک مثلث، با دو ضلع از مثلث دیگر نسبت برابر داشته باشند و زاویه بین آن اضلاع در دو مثلث با هم برابر باشند. دو مثلث متشابه‌اند و تشابه به حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ مساوی بین، گویند.



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=K=۱/۵$$

$$\hat{B}=\hat{B}'=\theta\Rightarrow\Delta_{ABC}\sim\Delta_{A'B'C'}$$

۳ــ هر گاه در دو مثلث، سه ضلع از یکی با سه ضلع از دیگری متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند و تشابه به حالت سه ضلع متناسب گویند.



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۶}{۴}=\frac{۴/۵}{۳}=K=۱/۵$$

$$\Rightarrow\Delta_{ABC}\sim\Delta_{A'B'C'}$$

۱ـ۱۷ـ محاسبهٔ طول با استفاده از روابط مثلثاتی (نسبت‌های مثلثاتی)

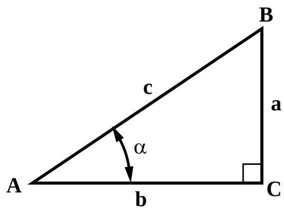
با تعریف روابط مثلثاتی برای یک مثلث قائم‌الزاویه به شرح زیر می‌توان به نسبت‌هایی جهت حل مثلث قائم‌الزاویه دست یافت.

۱ـ تعریف سینوس : $\sin = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$

۲ـ تعریف کسینوس : $\cos = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$

۳ـ تعریف تانژانت : $tg = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$

۴ـ تعریف کتانژانت : $cotg = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$



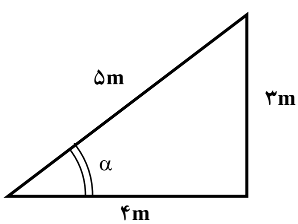
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cot g\alpha = \frac{b}{a}$$

❑ **مثال ۱ :** نسبت‌های مثلثاتی برای مثلث نشان داده شده را تعیین کنید.



حل : با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی داریم :

$$\sin\alpha = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

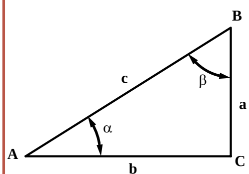
$$\cos\alpha = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

$$tg\alpha = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

$$\cot g\alpha = \frac{۴}{۳} = ۱/۳۳$$

تحلیل مثال صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی :

مثال : در مثلث قائم‌الزاویه ABC شکل ۱۳، روابط اصلی مثلثاتی برای زاویهٔ α چنین تعریف می‌شود :



شکل ۱۳

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$tg\alpha = \frac{a}{b}$	$\cot g\alpha = \frac{b}{a}$

تحلیل مثال : با توجه به قائمه بودن زاویه c می‌توان از نسبت‌های مثلثاتی استفاده نمود و به‌سادگی می‌توان برای نسبت $tg\alpha$ و $cotg\alpha$ به‌صورت زیر عمل نمود.

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \qquad cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}$$

حل تمرین صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی :

تمرین : در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC شکل ۱۳، روابط اصلی مثلثاتی را برای زاویهٔ β در جدول بنویسید.

$\sin\beta = —$	$\cos\beta = —$	$tg\beta = —$	$\cot g\beta = —$

حل تمرین : با توجه به مثلث نشان داده شده.

b ضلع مقابل زاویه B $\qquad \cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$

a ضلع مجاور زاویه B $\qquad \cot g\beta = \frac{a}{b} \qquad tg\beta = \frac{b}{a}$

c وتر

در زیر جدول نسبت‌های مهم‌ترین زوایا داده شده است که ضرورت دارد، دانش‌آموزان نسبت به حفظ آنها و سپردن به حافظه اهتمام ورزند.

روش تنظیم جدول :

برای سینوس : مخرج ثابت و برابر ۲ و صورت زیر رادیکال و افزایشی از صفر تا ۴

برای کسینوس : مخرج ثابت و برابر ۲ و صورت زیر رادیکال کاهشی از ۴ تا صفر

برای تانژانت : از حاصل تقسیم نسبت سینوس به کسینوس

برای کتانژانت : از حاصل تقسیم نسبت کسینوس به سینوس

جدول ۱ــ۸

زاویه / نسبت مثلثاتی	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{۰}}{۲}=۰$	$\frac{\sqrt{۱}}{۲}=\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۴}}{۲}=۱$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{۴}}{۲}=۱$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۱}}{۲}=\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۰}}{۲}=۰$
$tg\alpha$		$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده $=\frac{۱}{۰}$
$cotg\alpha$	تعریف نشده $=\frac{۱}{۰}$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	

یادآوری:

۱ــ تأثیر رادیکال

$\sqrt{۴}=۲$ $\quad$ $\sqrt{۱}=۱$ $\quad$ $\sqrt{۰}=۰$

۲ــ حاصل تقسیم

$\frac{۰}{\text{عدد}}=۰$

$\frac{\text{عدد}}{۰}=\infty$ تعریف نشده یا مبهم

۳ــ گویاکردن : اگر در مخرج کسری عبارت رادیکالی وجود داشته باشد با ضرب کردن عبارت رادیکالی در صورت و مخرج کسر، مخرج گویا می‌شود، به‌عنوان مثال :

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۴ــ برای نسبت‌های مثلثاتی $tg\alpha$، $cotg\alpha$ به‌صورت زیر عمل می‌شود.

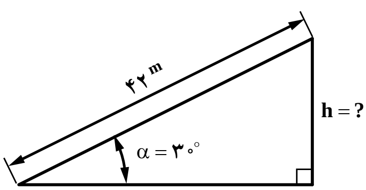
$$tg۳۰^\circ = \frac{\sin ۳۰}{\cos ۳۰} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot g۳۰ = \frac{\cos ۳۰}{\sin ۳۰} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

تحلیل مثال‌های حل شده صفحه ۱۳ کتاب درسی :

مثال ۱ : در شکل ۱۴ ارتفاع h را محاسبه می‌کنیم :

برای شکل موردنظر از رابطهٔ سینوس استفاده می‌نماییم (دلیل آن را توضیح دهید).



شکل ۱۴

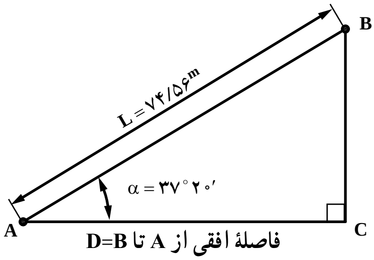
$$\sin\alpha = \frac{h}{۴۲}$$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{h}{\text{۴۲ متر}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h}{\text{۴۲ متر}} \quad h = \frac{۴۲ \times ۱}{۲} = \text{۲۱ متر}$$

تحلیل مثال ۱ : از نسبت‌های مثلثاتی برای حالتی که یک زاویه و یک ضلع داشته باشیم به‌سادگی قابل تعمیم جهت تعیین سایر اضلاع و یا از روی اضلاع جهت تعیین زوایا به‌کار برده می‌شود و استفاده از نوع نسبت مثلثاتی بستگی به معلومات و مجهولات موردنظر دارد.

$$tg\alpha = \frac{h}{\text{وتر}} \Rightarrow h = tg\alpha \times \text{وتر}$$

مثال ۲ : طول شیب‌دار $۷۴/۵۶m$ AB را در روی زمین اندازه‌گیری کرده‌ایم. در صورتی که زاویهٔ شیب $۳۷ \quad ۲۰'$ α باشد، فاصلهٔ افقی بین A و B چند متر است؟



فاصلهٔ افقی از A تا B=D

شکل ۱۵

حل : با توجه به شکل ۱۵ داریم : $\cos\alpha = \dfrac{D}{L}$

بنابراین داریم :

$D \quad L.\cos\alpha$

با استفاده از جدول‌های مثلثاتی انتهای کتاب داریم :

$\cos\alpha \quad \cos ۳۷ \; ۲۰' \quad ۰/۷۹۵۱$

با جای‌گذاری آنها در فرمول داریم :

$D \quad ۷۴/۵۶\,m \times ۰/۷۹۵۱ \quad ۵۹/۲۸\,m$

تحلیل مثال ۲ : پس از تبدیل زاویه برحسب درجه از طریق جداول کتاب و یا ماشین حساب از نسبت مثلثاتی کسینوس‌ها استفاده می‌شود.

$$\alpha = ۳۷ + \frac{۲۰}{۶۰} + \frac{۰}{۳۶۰۰} = ۳۷/۳۳۳۳$$

$\cos\alpha \quad \cos(۳۷ \text{ و } ۲۰') \quad ۰/۷۹۵۱۲۱$

$\cos\alpha = \dfrac{D}{L}$ $\qquad D \quad L \times \cos\alpha$

$D \quad ۷۴/۵۶ \times ۰/۷۹۵۱۲۱ \quad ۵۹/۲۸\,m$

نحوه تبدیل درجه به دقیقه و ثانیه با استفاده از ماشین‌حساب برای $۰/۰''$ و $۲۰'$ و ۳۷ α

در ماشین حساب‌های CASIO دکمه‌ای وجود دارد که وظیفه تبدیل به درجه اعشاری و یا درجه، دقیقه و ثانیه دارد.

تبدیل به درجه، دقیقه و ثانیه $۰/۰''$ و $۲۰'$ و ۳۷ $\quad$ $\boxed{\circ\ ,\ ,,}$ $۰/۰$ $\boxed{\circ\ ,\ ,,}$ ۲۰ $\boxed{\circ\ ,\ ,,}$ ۳۷

تبدیل به اعشار $\quad ۳۷/۳۳۳۳$ $\quad$ $\boxed{\overleftarrow{\circ\ ,\ ,,}}$ $\boxed{\text{shift}}$ $۰/۰''$ و $۲۰'$ و ۳۷°

یادآوری:

درجه (D) : $\frac{۱}{۳۶۰}$ پیرامون دایره را یک درجه و $\frac{۱}{۶۰}$ درجه را دقیقه و $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه را ثانیه گویند که با علامت ″ و ′ و نمایش داده می‌شود.

گراد (G) : $\frac{۱}{۴۰۰}$ پیرامون دایره را یک گراد و $\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد را سانتی‌گراد (دقیقه گرادی) و $\frac{۱}{۱۰۰}$ سانتی‌گراد را ثانیه گرادی گفته می‌شود که با علامت ″ و ′ و ^{G} نمایش داده می‌شود.

رادیان (R) : $\frac{۱}{۲\pi}$ پیرامون دایره را یک رادیان گویند و هر رادیان زاویه‌ای در حدود ″۴۴/۹ و ′۱۷ و ۵۷ و یا ″۱۹/۷ و ′۶۶ و ۶۳^{G} می‌باشد.

مثال : زاویه ۵۷/۲۹۵۷۷۹۵۱ را برحسب درجه و دقیقه و ثانیه تبدیل کنید.

$$۵۷/۲۹۵۷۷۹۵۱ \quad ۵۷ \text{ و } ۰/۲۹۵۷۷۹۵۱ \times ۶۰$$

$$۵۷ \text{ و } ۱۷/۷۴۶۷۷۰۷۷$$

$$۵۷ \text{ و } ۱۷' \text{ و } ۰/۷۴۶۷۷۰۷۷ \times ۶۰$$

$$۵۷ \text{ و } ۱۷' \text{ و } ۴۴/۸۱''$$

مثال : ″۲۴/۹ و ′۴۲ و ۱۴ را برحسب درجه بیان کنید.

$$۱۴ \text{ و } ۴۲' \text{ و } ۲۴/۹'' = ۱۴ + \frac{۴۲}{۶۰} + \frac{۲۴/۹}{۳۶۰۰} = ۱۴/۷۰۶۹۱۶۶۷^{\circ}$$

تبدیل زوایا از تناسب زیر حاصل می‌شود.

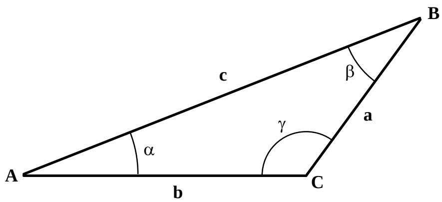
$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}$$

۱ــ۱۸ــ محاسبهٔ طول با استفاده از قضیه سینوس‌ها

در هر مثلث غیرمشخص رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c} = ۲R$$

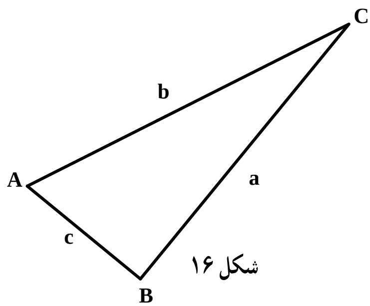
$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = ۲R}$$



«در مثلث غیرمشخص، نسبت هر ضلع به سینوس زاویهٔ مقابلش ثابت و برابر است با قطر دایره محیطی آن مثلث»

تحلیل مثال‌های صفحه ۱۵ کتاب درسی :

مثال ۱ : در مثلث ABC (شکل ۱۶)، طول a   ۴۵m و $\hat{A}=۳۷^\circ$ و $\hat{B}=۱۱۸^\circ$ است. طول b چند متر است؟



شکل ۱۶

حل : رابطهٔ سینوس‌ها را می‌نویسیم :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{۴۵m}{\sin ۳۷^\circ}=\frac{b}{\sin ۱۱۸^\circ}$$

$$\Rightarrow b=\frac{\sin ۱۱۸^\circ}{\sin ۳۷^\circ}\times ۴۵m=\frac{۰/۸۸۳۰}{۰/۶۰۱۸}\times ۴۵m$$

$$b \quad ۶۶/۰۲\ m$$

تحلیل مثال ۱ : در مثلث غیرمشخص به‌واسطه بسته شدن مثلث و تشکیل سه ضلعی باید :

۱ــ و تراز تفاضل دو ضلع دیگر بیشتر باشد.

۲ــ و تراز مجموع دو ضلع دیگر کمتر باشد.

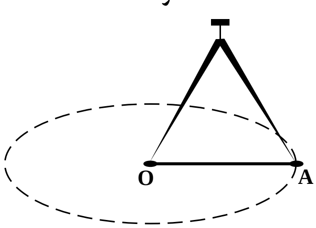
۳ــ مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰ درجه می‌باشد.

۴ــ شعاع دایره محیطی مثلث به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

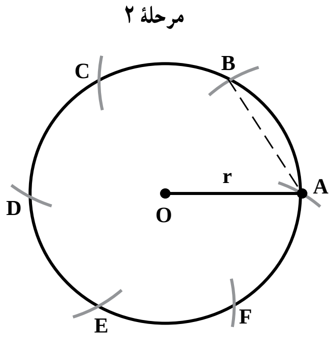
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin c}=۲R\Rightarrow\frac{۴۵}{\sin ۳۷}=۲R \qquad R=۳۷/۳۹\,m$$

۱ــ۱۹ــ محیط دایره

مرحلهٔ ۱



مرحلهٔ ۱ : برای ترسیم یک دایره کافی است پرگاری را آماده نموده و دهانه آن را به اندازهٔ مناسب باز کنید. آنگاه سوزن پرگار را در نقطه O و مداد آن روی نقطه‌ای نظیر A قرار دهید. بدیهی است که فاصله OA دهانه پرگار و شعاع دایره‌ای است که می‌خواهید ترسیم نمایید.



مرحلهٔ ۲ : پس از ترسیم دایره به‌شعاع OA، بدون تغییر در اندازهٔ دهانه پرگار، سوزن آن را برروی محیط دایره و در نقطه A گذاشته و با همان شعاع قبلی کمانی روی محیط دایره (نقطه B) ترسیم می‌نمائیم و مجدداً با نصب سوزن پرگار در B نقطه C را ایجاد می‌نمائیم همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود محیط دایره حدوداً ۶ برابر شعاع آن است.

U (محیط دایره) > ۶r

با کمی دقت ملاحظه می‌شود که طول‌های مستقیم بین نقاط A و B و ... و F برابر ۶r است در حالی‌که به دلیل طول کمان محیط دایره بین نقاط A و B و ... و F، طول واقعی محیط از ۶r بیشتر است. از طریق انتگرال‌گیری می‌توان ثابت کرد که محیط واقعی دایره برابر است با :

r شعاع دایره

D قطر دایره

$$\boxed{U = ۲\pi r = \pi . D}$$

فعالیت

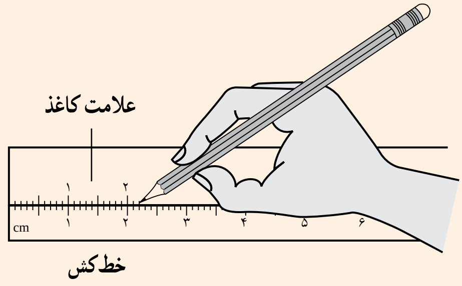
ساخت یک نوار متریک انعطاف‌پذیر جهت اندازه‌گیری محیط اجسام گرد.

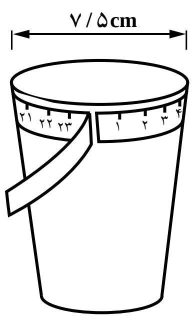
مواد لازم : نوار لاستیکی یا نوار کاغذی بریده شده

قیچی

خودکار

روش عمل : نوار کاغذی به عرض ۱/۵ سانتی‌متر و طول ۲۸ سانتی‌متر برش داده و سپس با تنظیم در لبه یک خط‌کش اندازه‌ها را روی آن منتقل می‌کنیم.





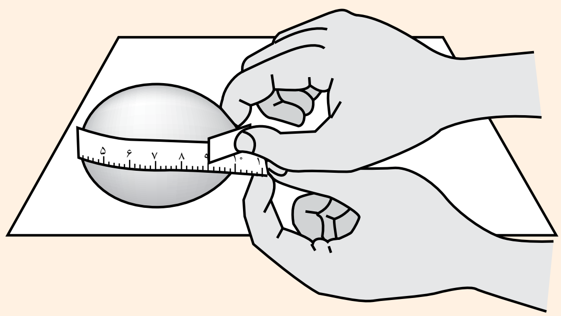
بحث کنید : در یک اندازه‌گیری مطابق شکل، قطر دهانه لیوان ۷/۵ سانتی‌متر اندازه‌گیری شد و متر کاغذی محیط دهانه لیوان را ۲۳/۶ سانتی‌متر نشان داد مطلوب است تعیین عدد π.

$$u \quad \pi . D$$

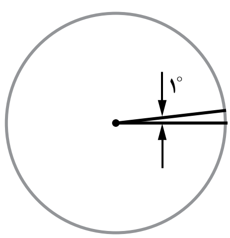
$$۲۳/۶ \quad \pi \times ۷/۵ \qquad\qquad \pi = \frac{۲۳/۶}{۷/۵} = ۳/۱۴$$

بیشتر بدانید

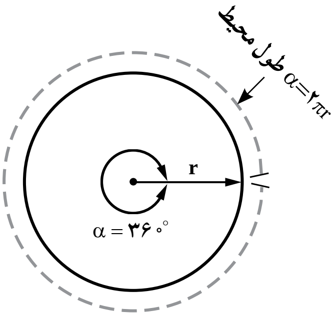
کوچک‌ترین تخم پرنده مربوط به مرغ مگس‌خوار گل ماهور جامائیکاست. دور تا دور این تخم‌مرغ ۹/۹ میلی‌متر طول دارد.



۱ـ۲۰ـ طول قوس قطاعی از دایره با زاویه مرکزی α (برحسب درجه)



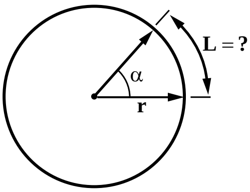
در دایرهٔ مقابل محیط کلی دایره برای ۳۶۰° درجه چرخش برابر است با $۲\pi R$ u است. اگر زاویه کامل دایره نصف شود. آنگاه طول محیط نصف و اگر زاویه یک چهارم شود. طول محیط هم یک چهارم می‌شود پس طول و محیط روبه‌روی زاویه یک درجه $\frac{۱}{۳۶۰}$ طول محیط دایره می‌باشد. لذا تناسب حاصل که از نوع مستقیم است، می‌تواند رابطهٔ کلی برای طول کمان به‌صورت صفحهٔ بعد ثابت نماید.



طول کمان	زاویه
$۲\pi r$	۳۶۰
کاهش ↓	کاهش ↓
L	α

$$\boxed{L = ۲\pi r \times \frac{\alpha}{۳۶۰}}$$

طول کمان روبه‌روی زاویه مرکزی α



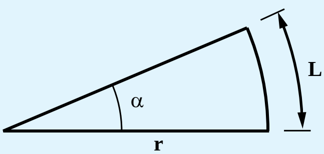
☑ اگر α ۳۶۰ $\Rightarrow L \quad ۲\pi r \times \frac{۳۶۰}{۳۶۰} \quad ۲\pi r$: کنترل رابطه حاصل شده

☑ اگر α ۰ $\Rightarrow L \quad ۲\pi r \times \frac{۰}{۳۶۰} \quad ۰$

☑ اگر α ۱۸۰ $\Rightarrow L \quad ۲\pi r \times \frac{۱۸۰}{۳۶۰} \quad \pi r$

☑ اگر α ۹۰ $\Rightarrow L \quad ۲\pi r \times \frac{۹۰}{۳۶۰} = \frac{\pi r}{۲}$

یادآوری و دانش‌افزایی



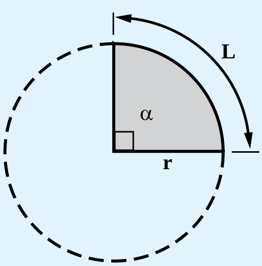
اگر زاویه مرکزی بر حسب رادیان باشد

آنگاه از رابطه زیر طول کمان به‌دست می‌آید.

$$L \quad \alpha . r$$

r شعاع کمان

α زاویه برحسب رادیان



مثال : طول کمان نشان داده شده را از دو رابطهٔ (درجه و رادیان) بیان شده تعیین و اختلاف آنها را بیان کنید.

الف) محاسبه طول کمان برحسب درجه :

$\alpha \quad ۹۰ \qquad L = ۲\pi r \times \frac{\alpha}{۳۶۰} = ۲\pi r \times \frac{۹۰}{۳۶۰}$

$$\boxed{L = \frac{\pi r}{۲}}$$

ب) محاسبه طول کمان برحسب رادیان :

$$\alpha = ۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow L = \alpha . r$$

$$L = \frac{\pi}{۲} . r = \frac{\pi r}{۲}$$

$$\boxed{L = \frac{\pi r}{۲}}$$

ج) از طریق محاسبه یک چهارم محیط دایره می‌توان رأساً اقدام نمود.

دایره کامل $u \quad ۲\pi r$ ربع دایره $L = \frac{u}{۴} = \frac{۲\pi r}{۴} = \frac{\pi r}{۲}$